

转动薄壁圆柱筒振动特性:有限元法与解析解的对比

王能茂^{1,2}, 王延荣^{1,2}

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;

2. 先进航空发动机协同创新中心, 北京 100191)

摘 要: 采用解析法和有限元法,研究了科氏力和离心刚化效应对不同约束条件下转动薄壁圆柱筒结构振动特性的影响,并进行了对比分析.结果表明,与解析解相比,有限元法计算得到的静止状态薄壁圆柱筒结构固有频率因边界条件不同而存在不同的差异,其中两端简支边界条件下与解析解吻合较好.随转速增加,前后行波频率差值加大,曲线明显分离,而这种分离趋势随周向波数的增大而减小.由于离心刚化效应的存在,相比于只考虑科氏力的影响,转动薄壁圆柱筒的行波频率有增大的趋势,并且当转速和周向波数较大时,前后行波频率均会大于对应的静频率.

关 键 词: 薄壁圆柱筒; 振动特性; 科氏力; 离心刚化效应; 有限元法

中图分类号: V215.3

文献标志码: A

Vibration characteristics of rotating thin-walled cylindrical shell: comparison of finite element method with analytical solution

WANG Neng-mao^{1,2}, WANG Yan-rong^{1,2}

(1. School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. Collaborative Innovation Center for Advanced Aero-Engine, Beijing 100191, China)

Abstract: Analytical solution and finite element method were used to study the influence of Coriolis force and centrifugal stiffening effect on the vibration characteristics of rotating thin-walled cylinder structure under different constraints. Results show that the finite element method to calculate the natural frequency of the thin-walled cylinder structure, compared with the analytical solution, has deviation under different static boundary conditions. Results of the two methods fit well for simply supported boundary conditions. With the increase of rotating speed, travelling wave frequency curves of backward wave and forward wave were clearly separated, and the trend of separation decreased with the increase of circumference wave number. Because of the influence of centrifugal stiffening effect, compared with to the case of only considering the effect of Coriolis force, the travelling wave frequency of rotating thin-walled cylindrical shell will increase, and when the rotating speed and circumference wave number is larger, the forward and backward traveling wave frequencies are greater than the static natural frequency.

收稿日期:2015-07-10

作者简介:王能茂(1989—),男,博士生,主要从事航空发动机结构强度、振动特性研究.

引用格式:王能茂,王延荣.转动薄壁圆柱筒振动特性:有限元法与解析解的对比[J].航空动力学报,2017,32(3):689-696. WANG Nengmao, WANG Yanrong. Vibration characteristics of rotating thin-walled cylindrical shell: comparison of finite element method with analytical solution[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(3): 689-696.

Key words: thin-walled cylindrical shell; vibration characteristics; Coriolis force; centrifugal stiffening effect; finite element method

转动的薄壁圆柱筒在动力机械中应用广泛,如航空发动机中的薄壁轴、鼓筒结构及篦齿封严组件等.转动所带来的科氏力和离心力使得转动薄壁圆柱筒具有不同于静态圆柱筒的动力学特性.当薄壁圆柱筒以匀角速度转动时,由于离心力引起的环向初应力的影响,导致筒体刚度增加,转动频率随转速的升高而增大;同时,因转动速度矢量与变形速度矢量不同而导致的科氏力影响,薄壁圆柱筒的频率由静止状态随转速变化而形成两支,即产生不同频率的前后行波,区别于静止状态下圆柱筒频率所对应的驻波(振型).

对于旋转状态下的薄壁圆柱筒,可以采用解析方法分析其不同边界条件下的振动特性. Leissa^[1]对壳体的振动进行了较系统的综述. Saito 和 Endo^[2]应用三角函数和 Galerkin 法求得了两端固支旋转圆柱壳的固有频率. Lam 和 Loy^[3]对分别采用 Donnell, Flügge, Love 和 Sanders 四种壳体理论所得到的两端简支边界条件下的转动圆柱壳前后行波特性进行了对比. Lam 和 Loy^[4]考虑离心力、科氏力和初始应力,分析了转速、厚径比等因素对圆柱壳在不同边界条件下固有频率的影响. LI Hua 和 Lam^[5]利用广义微分求积法考查了边界条件对转动薄壁圆柱筒振动特性的影响. Evensen^[6]采用 Galerkin 法分析了薄壁圆环的非线性弯曲振动,并与实验结果进行了对比. Zhang^[7]采用波传播法考察了层合复合材料转动薄壁圆柱筒的振动特性,重点考察了圆柱筒长径比对前后行波频率的影响.在对转动薄壁圆柱筒振动特性研究的基础上,LI Hua 与 Lam 等人^[8-9]研究了转动平头圆锥壳的振动特性,并考查了材料各向异性及边界条件的影响. Lee 和 Kim^[10]研究了复合材料薄壁圆柱筒在附加周向肋环及轴向肋情况下的自由振动特性.需要注意的是,采用解析法和半解析法只能对边界条件和形状都比较简单的轴对称壳体进行求解.

除了解析方法,在圆柱圆柱筒的振动特性分析中还大量采用传递矩阵法.文献[11]基于壳体理论建立的一般旋转壳体振动方程采用传递矩阵法进行了数值求解,在动、静坐标系下分析了壳体长径比、厚径比及其边界条件对行波振动特性的影响.文献[12]利用传递矩阵法考查了旋转圆柱薄壁壳的静止条件下固有频率和转动条件下的行

波特特性,特别是高节径振动特性以及壳体外壁周向篦齿结构(即密封齿)对固有振动特性的影响.文献[13]总结并给出了旋转壳体结构的经典计算方法.

有限元法在旋转壳体振动特性的分析中的应用也极为广泛. Chen 等人^[14]利用线性近似,考虑了科氏加速度和大变形的影响,利用有限元法分析了高速旋转的薄壁壳体的振动特性,得到了与其他文献较吻合的结果. Guo 等人^[15]采用超参元法,考虑剪切和轴向变形以及转动惯性,分析了旋转薄壁壳的振动特性,并在计算中考虑了科氏加速度、离心力、初始张力以及由于大变形引起的几何非线性的影响.文献[16]给出了用有限元法计算转动壳体的有限元方法,用软件 MSC/NASTRAN 的 DAMP 语言编制了形成科氏力矩阵与离心刚度矩阵的程序,对转动壳体的振动特性进行了分析.

实际的航空发动机鼓筒/篦齿封严结构设计中需要准确获得其固有振动特性,通常采用有限元法以进行振动和气弹稳定性评估.然而,通用有限元程序获得的结果有时(尤其是周向波数较小时)存在一定的差异.

因转动状态下薄壁圆柱筒的固有频率实测结果很少,本文在薄壁壳体经典理论基础^[17]上,基于 Love 壳体假设^[18],对转动薄壁圆柱筒在不同边界条件下的行波振动特性分别采用解析法和有限元法^[19]进行了计算,解析法中采用波传播法对薄壁圆柱筒的周向和轴向振型进行解析计算,可以简化计算模型和提高计算速度;有限元计算方法中考虑了科氏力的影响,将科氏力矩阵作为类似于阻尼矩阵的处理方式进行求解,采用有阻尼的模式分析方法,可以较为准确地得出薄壁圆柱筒前后行波频率.分析科氏力、离心力对转动薄壁圆柱筒固有振动特性的影响,并做了对比分析,明确了两者结果的差异,可为航空发动机结构设计中的鼓筒/篦齿封严结构振动及气动弹性分析提供参考.

1 转动薄壁圆柱筒振动分析解析法

1.1 基本方程及其解法

转动薄壁圆柱筒模型如图 1 所示,其中 H 为圆柱筒的厚度(m); R 为半径(m); L 为长度(m); Ω 为圆柱筒绕 x 轴转动的角速度(r/min).在柱坐标系 $x\theta z$ 中, u 、 v 和 w 分别为圆柱筒在 x 、 θ 和 z 方向上的位移.

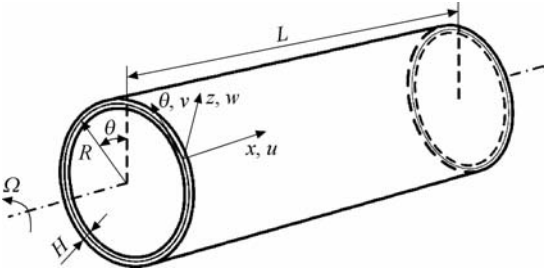


图 1 转动薄壁圆柱筒模型

Fig. 1 Rotating thin-walled cylindrical shell model

基于 Kirchhoff-Love 假设,认为设法向挠度沿中曲面法线,只讨论薄壁壳体的中面变形,忽略薄壁结构的转动惯性等,在柱坐标系下转动薄壁圆柱筒轴向、周向和径向 3 个方向上的动力学微分方程可表达为^[12]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R\partial\theta} + N_\theta^0 \left(\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho H \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{R\partial\theta} + \frac{Q_\theta}{R} + \frac{N_\theta^0}{R} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta} = \rho H \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} - \Omega^2 v \right) \quad (1b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{R\partial\theta} - \frac{N_\theta}{R} + \frac{N_\theta^0}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \rho H \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 w \right) \quad (1c)$$

其中 ρ 为薄壁圆柱筒材料密度,剪力 $Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R\partial\theta}$, $Q_\theta = \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{R\partial\theta}$; 离心力引起的初始切向应力项 $N_\theta^0 = \rho H \Omega^2 R^2$; $\rho H \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\rho H \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\rho H \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ 为惯性力; $2\rho H \Omega \frac{\partial w}{\partial t}$, $2\rho H \Omega \frac{\partial v}{\partial t}$ 为科氏力; $\rho H \Omega^2 v$, $\rho H \Omega^2 w$ 为离心力。

对于薄壁圆柱筒,其轴向振型接近于相应边界条件的梁的振型,故其振型函数可以用轴向梁振型函数和周向三角函数的组合形式来描述,设旋转状态下薄壁圆柱筒的位移函数为

$$u(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U \phi_m^u(x) \varphi_n^u(\theta, t) \quad (2a)$$

$$v(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V \phi_m^v(x) \varphi_n^v(\theta, t) \quad (2b)$$

$$w(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W \phi_m^w(x) \varphi_n^w(\theta, t) \quad (2c)$$

式中 U, V 和 W 为位移幅值, m 为轴向半波数, n 为周向波数: $\varphi_n^k(\theta, t)$ ($k=u, v, w$) 为薄壁圆柱筒周

向振型函数,可表达为

$$\varphi_n^u(\theta, t) = \varphi_n^w(\theta, t) = \cos(n\theta + \omega t) \quad (3a)$$

$$\varphi_n^v(\theta, t) = \sin(n\theta + \omega t) \quad (3b)$$

式中 ω 为转动薄壁圆柱筒的固有频率值。 $\phi_m^k(x)$ ($k=v, w$) 为圆柱筒轴向振型函数,其表达式形式为轴向梁函数,即

$$\phi_m^v(x) = \phi_m^w(x) = a_1 \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) - \sigma_m \left[a_3 \sinh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + a_4 \sin\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) \right] \quad (4)$$

而 $\phi_m^u(x) = \frac{L}{\lambda_m \phi_m^v(x)} = \frac{L}{\lambda_m \phi_m^w(x)}$ 。式中 λ_m, σ_m 和 a_i ($i=1, 2, 3, 4$) 值可由梁边界条件确定,具体如下:

1) 两端简支 S-S (simply supported) 边界条件

$$\lambda_m = m\pi, \sigma_m = 1, a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = -1$$

2) 两端固支 C-C (clamped-clamped) 边界条件

$$\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = 1, \sigma_m = \frac{\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m}{\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m},$$
$$a_1 = a_3 = 1, a_2 = a_4 = -1$$

3) 固支-自由 C-F (clamped-free) 边界条件

$$\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = -1, \sigma_m = \frac{\cosh \lambda_m + \cos \lambda_m}{\sinh \lambda_m + \sin \lambda_m},$$
$$a_1 = a_3 = 1, a_2 = a_4 = -1$$

在上述 3 种边界条件下不同轴向半波数 m 的圆柱筒轴向振型函数的 λ_m 值可由数值解法求得。

将位移函数式代入式(1),采用 Galerkin 法计算偏微分方程组,积分运算后,可得转动薄壁圆柱筒的固有频率特征方程

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

式中 c_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 为系数,与转动薄壁圆柱筒的固有频率 ω 、转速 Ω 、几何参数和材料参数(薄膜刚度 K 、弯曲刚度 D 、泊松比 μ)有关,具体表达为^[20]

$$c_{11} = \omega^2 + \frac{K}{\rho H} \left[T_1 - \frac{n^2(1-\mu)}{2R^2} \right] - (n\Omega)^2$$

$$c_{12} = K \frac{n(1+\mu)}{2\rho HRL} \quad c_{13} = K \frac{\mu}{\rho HRL} - \frac{R}{L} \Omega^2$$

$$c_{21} = - \left[K \frac{n(1+\mu)L}{2\rho HR} + nLR^2\Omega^2 \right] T_2$$

$$c_{22} = \omega^2 + \Omega^2 + \frac{(KR^2 + D)}{\rho HR^2} \left(\frac{1-\mu}{2} T_2 - \frac{n^2}{R^2} \right)$$

$$c_{23} = \frac{Dn}{\rho HR^2} \left(T_2 - \frac{n^2}{R^2} \right) - \frac{Kn}{\rho HR^2} + 2\omega\Omega$$

$$c_{31} = -K \frac{\mu L}{\rho HR} T_2$$

$$c_{32} = \frac{Dn}{\rho HR^2} \left(T_2 - \frac{n^2}{R^2} \right) - \frac{Kn}{\rho HR^2} - n\Omega^2 + 2\omega\Omega$$
$$c_{33} = \omega^2 + (1 - n^2)\Omega^2 +$$
$$D \frac{n^2}{\rho HR^2} \left(2T_2 - \frac{n^2}{R^2} \right) - \frac{K}{\rho HR^2} - \frac{D}{\rho H} T_3$$

式中

$$T_1 = \frac{\int_0^L \phi'(x) \phi'''(x) \mathrm{d}x}{\int_0^L \phi'(x) \phi'(x) \mathrm{d}x}$$
$$T_2 = \frac{\int_0^L \phi(x) \phi''(x) \mathrm{d}x}{\int_0^L \phi(x) \phi(x) \mathrm{d}x} \quad T_3 = \frac{\int_0^L \phi(x) \phi''''(x) \mathrm{d}x}{\int_0^L \phi(x) \phi(x) \mathrm{d}x}$$

由方程式(5)得到转动薄壁圆柱筒固有频率的求解方程

$$\omega^6 + \omega^4 \beta_1 + \omega^3 \beta_2 + \omega^2 \beta_3 + \omega \beta_4 + \beta_5 = 0 \quad (6)$$

其中系数为 β_i ,

$$\beta_1 = c_{11} + c_{22} + c_{33} - 4\Omega^2 \quad \beta_2 = -2\Omega(c_{23} + c_{32})$$
$$\beta_3 = c_{11}c_{22} + c_{11}c_{33} + c_{22}c_{33} - c_{12}c_{21} - c_{13}c_{31} -$$
$$c_{23}c_{32} - 4\Omega^2 c_{11}$$
$$\beta_4 = 2\Omega(c_{13}c_{21} + c_{12}c_{31} - c_{11}c_{23} - c_{11}c_{32})$$
$$\beta_5 = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} -$$
$$c_{11}c_{23}c_{32} - c_{12}c_{21}c_{33}$$

由上式可以看出,薄壁圆柱筒不转动 ($\Omega=0$ r/min)时, $\beta_2=\beta_4=0$,其频率方程为未知数 ω^2 的一元三次方程,可求得 3 个根为

$$\omega_{inn}^2 = -\frac{1}{3} \left\{ 2\sqrt{a^2 - 3b} \cos \left[\alpha + \frac{2\pi}{3}(i-1) \right] + a \right\}$$
$$(7)$$

式中 $\alpha = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{a^3 - 4.5ab + 13.5c}{(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}} \right]; i=1,2,3.$

当薄壁筒转动时,一元六次方程式(6)可利用数值方法进行求解计算,本文采用数学软件 Matlab 求解此频率方程,得到固有频率.

表 3 两端自由薄壁圆柱筒行波频率系数的对比 ($m=1,\mu=0.3,H/R=0.002$)

Table 3 Travelling wave frequency coefficient of thin-walled cylindrical shell at free-free boundary conditions ($m=1,\mu=0.3,H/R=0.002$)					
Ω /(r/min)	n	本文		文献[14]	
		后行波	前行波	后行波	前行波
3	3	0.0050469	0.0050390	0.0044779	0.0042903
	4	0.0085372	0.0085317	0.0084766	0.0083294
	5	0.0136342	0.0136298	0.0136483	0.0135280
	6	0.0199583	0.0199545	0.0199836	0.0198822
	7	0.0274538	0.0274506	0.0274785	0.0273909
	8	0.0361094	0.0361065	0.0361310	0.0360540

1.2 数值计算结果及其对比分析

为便于计算结果的对比和讨论,可定义频率系数 $f=2\pi R\omega \sqrt{\frac{(1-\mu^2)\rho}{E}}$.

为了检验解析法的数值计算结果的准确性,将本文解析解与参考文献结果进行对比见表 1~表 3. 其中,表 1 和表 2 分别为静止状态下两端简支和两端固支薄壁圆柱筒频率系数,由表中可以看出,本文计算结果与文献中的结果相差较小.

表 1 静止状态两端简支薄壁圆柱筒频率系数 f 比较 ($m=1,\mu=0.3,L/R=20,H/R=0.05$)

Table 1 Frequency coefficient f of thin-walled cylindrical shell at static simply supported boundary conditions ($m=1,\mu=0.3,L/R=20,H/R=0.05$)				
n	本文	文献[21]	文献[5]	
			余弦法	等距法
2	0.039330	0.039233	0.039819	0.040007
3	0.109839	0.109477	0.109898	0.109946
4	0.210293	0.209008	0.210310	0.210342

表 2 静止状态两端固支薄壁圆柱筒频率系数 f 比较 ($m=1,\mu=0.3,L/R=10$)

Table 2 Frequency coefficient f of thin-walled cylindrical shell at static clamped-clamped boundary conditions ($m=1,\mu=0.3,L/R=10$)				
工况	本文	文献[22]	文献[23]	文献[5]
$H/R=0.002$ ($n=4$)	0.015259	0.01508	0.01515	0.01672
$H/R=0.05$ ($n=2$)	0.060681	0.05787	0.05795	0.06226

表 3 为两端自由边界条件下转动薄壁圆柱筒行波频率系数与文献中计算结果的对比. 由表中

续表

$\Omega/(\text{r/min})$	n	本文		文献[14]	
		后行波	前行波	后行波	前行波
6	3	0.0050494	0.0050356	0.0045788	0.0042035
	4	0.0085400	0.0085291	0.0085541	0.0082597
	5	0.0136365	0.0136276	0.0137109	0.0134704
	6	0.0199602	0.0199527	0.0200361	0.0198332
	7	0.0274555	0.0274491	0.0275236	0.0273484
	8	0.0361109	0.0361052	0.0361705	0.0360165

可以看出,除了少数周向波数较小的情况下,前后行波频率系数存在一定误差($n=3$),其他的周向波数下的频率系数与文献结果均较接近.

文献[14]对于后行波频率系数(f_b)与前行波频率系数(f_t)给出的表达式分别为

$$f_b = \frac{2n}{n^2 + 1}\Omega + \sqrt{\frac{n^2(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} \cdot \frac{Eh^2}{12(1 - \mu^2)\rho R^2} + \frac{n^4 + 3}{(n^2 + 1)^2}\Omega^2}$$
$$f_t = \frac{2n}{n^2 + 1}\Omega - \sqrt{\frac{n^2(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} \cdot \frac{Eh^2}{12(1 - \mu^2)\rho R^2} + \frac{n^4 + 3}{(n^2 + 1)^2}\Omega^2}$$

由解析法数值计算结果与文献结果的对比可认为误差均在较小的范围内,表明本文的解析法是可行的.

2 考虑科氏力的有限元模态分析

2.1 有限元法求解的基本过程

考虑科氏力的动力学分析方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_c)\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{G}, \mathbf{K}$ 分别为整体质量矩阵、整体阻尼矩阵、整体科氏力矩阵、整体刚度矩阵; $\mathbf{K}_c$ 为离心力旋转软化效应的刚度矩阵; $\mathbf{F}$ 为载荷向量; 整体

科氏力矩阵 $\mathbf{G} = \sum_i^N \mathbf{G}_e$, 单元科氏力矩阵为 $\mathbf{G}_e =$

$$2 \int_V \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{N} \rho \, dV_e; \, V_e \text{ 为体积, 转速矩阵 } \boldsymbol{\Omega} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

在该式中,科氏力矩阵是

作为类似于阻尼矩阵的处理方式进行求解的.

对于无阻尼的模态分析,常用有限元软件提供的模态提取方法有分块 Lanczos 法、子空间法、Power Dynamics 法和缩减法.有阻尼的模态分析方法为 Damped Method 和 QR Damped Method. 本文对转动薄壁圆柱筒的有限元计算分析选用 QR Damped Method,简要如下:

无外部激励的弹性结构动力学方程为 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$. $\mathbf{K}$ 可以分为对称和非对称部分,暂不

考虑阻尼矩阵 $\mathbf{C}$ 和刚度矩阵非对称部分的影响,对称部分则通过分块 Lanczos 法求解得其实特征值及特征向量.特征值问题可转化为模态子空间问题来求解: $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}$. 其中 $\boldsymbol{\Phi}$ 为特征向量矩阵, $\mathbf{y}$ 为模态坐标的向量,将结构动力学方程可改写为

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{y}} + (\boldsymbol{\Lambda}^2 + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_{\text{unsym}} \boldsymbol{\Phi}) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (9)$$

式中 $\boldsymbol{\Lambda}^2$ 为包含前 N 阶固有频率 ω_i 的对角矩阵; 对于黏性阻尼系统,模态阻尼矩阵是对角矩阵.式(9)可改写为 $\mathbf{I}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\mathbf{z}$.

式中

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\Lambda}^2 - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_{\text{unsym}} \boldsymbol{\Phi} & -\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}$$

有限元法通过求解上式动力学方程得到转动薄壁圆柱筒的考虑科氏力影响的前后行波频率.

2.2 有限元法的计算示例

有限元法计算分析的示例为薄壁圆柱筒,其几何参数基于参考文献[12],给定长度 $L=0.256 \text{ m}$, $H=0.0025 \text{ m}$, $R=0.16 \text{ m}$;材料参数为:弹性模量 $E=110 \text{ GPa}$,泊松比 $\mu=0.31$,密度 $\rho=4480 \text{ kg/m}^3$.

薄壁圆柱筒的有限元模型采用壳单元,单元厚度设为壁厚为 0.0025 m ,单元数为 10251,节点数为 10452,利用了软件 ANSYS 分别计算 3 种典型边界条件下的静频率和转动条件下的行波频

率,其中在转动柱坐标系中分别考虑科氏力和离心力对转动薄壁圆柱筒行波振动特性的影响. 并将有限元计算的结果与相同边界条件下的解析解进行了对比.

有限元计算的薄壁圆柱筒静频率与解析解对比如图 2(两端简支)、图 3(两端固支)和图 4(一端固支一端自由)所示.

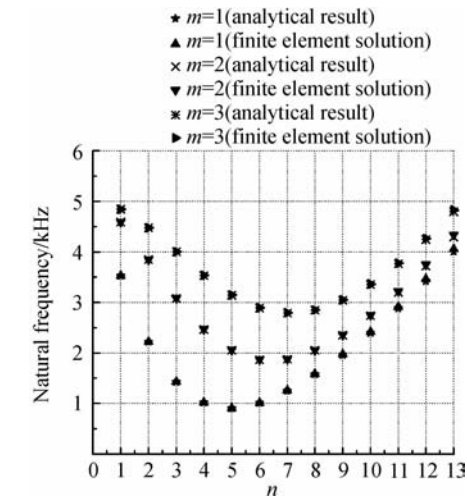


图 2 两端简支静频率随周向波数变化
Fig. 2 Static natural frequency varying with different circumferential wave number under simply-supported boundary condition

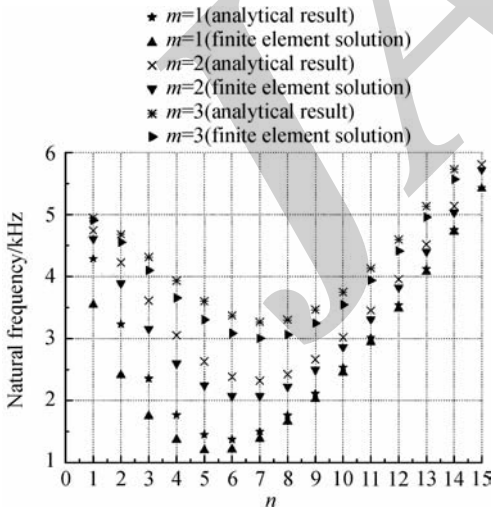


图 3 两端固支静频率随周向波数变化
Fig. 3 Static natural frequency varying with different circumferential wave number under clamped-clamped boundary condition

由图 2 可以看出,两端简支薄壁圆柱筒静频率的有限元计算结果与解析解吻合较好;而图 3 和图 4 所示的两端固支及固支-自由边界条件的有限元计算结果在周向波数较小时存在较大差

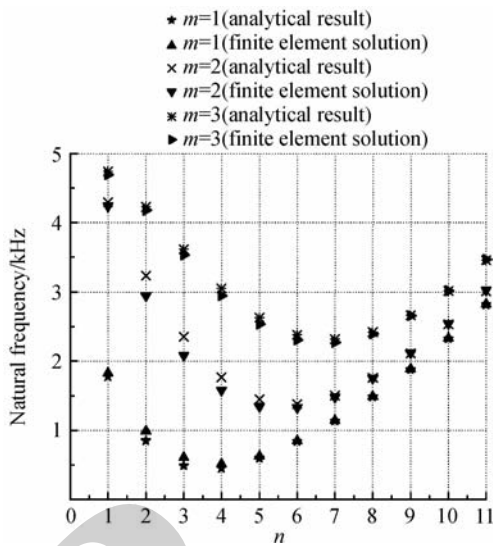


图 4 固支-自由静频率随周向波数变化
Fig. 4 Static natural frequency varying with different circumferential wave number under clamped-free boundary condition

异,特别是两端固支边界条件的结果误差较大,随着周向波数增大,有限元计算的静频率结果与解析解误差逐渐减小. 这是因为在解析法中采用的轴向梁振型函数,只有在两端简支边界条件下薄壁筒轴向波数恰好等于相同长度梁的轴向波数,精度最大.

图 5 和图 6 分别为转动状态圆柱筒两端固支、固支-自由两种边界条件下轴向半波数 $m=1$

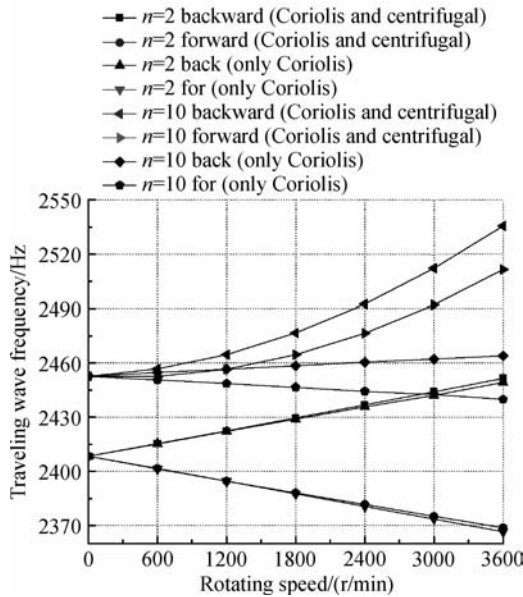


图 5 不同转速两端固支行波频率比较($m=1$)
Fig. 5 Travelling wave frequency at different rotating speeds under clamped-clamped boundary condition ($m=1$)

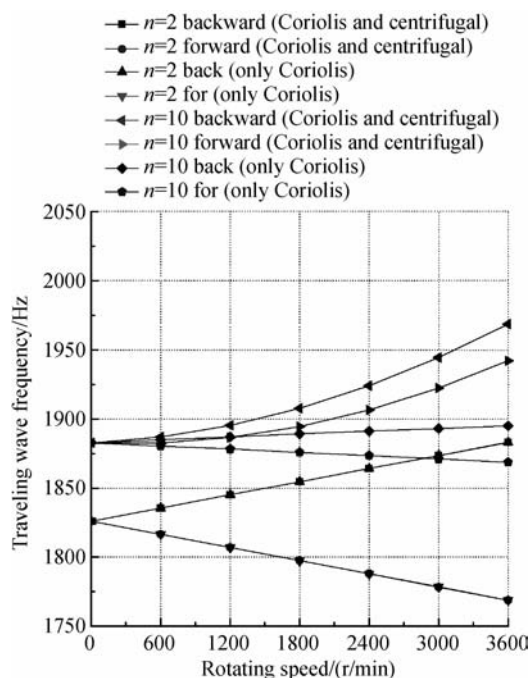


图6 不同转速固支-自由行波频率比较

Fig. 6 Travelling wave frequency at different rotating speeds under clamped-free boundary condition

时的前后行波频率(有限元解)随转速的变化,受科氏力影响,转动薄壁圆柱筒的频率分前后行波两支,在周向波数较小时($n=1, 2$),前后行波频率相差比周向波数较大时($n=9, 10$)的大;离心力对薄壁圆柱筒振动特性的影响与周向波数和转速相关,周向波数较小时是否考虑离心力对行波频率的影响不明显,而周向波数较大时,考虑离心力的影响前后行波频率明显增大,且在某些节径和转速下前后行波频率均大于静频率,这主要是由于离心刚化效应所致。

由上述计算结果的对比可以看出,有限元法计算所得到的转动薄壁圆柱筒的固有频率较为准确,但在较小周向波数时与解析解相比有一定的差异。

3 结论

本文分别采用解析法和有限元法对典型边界条件下转动薄壁圆柱筒的固有振动特性进行了分析,其中考虑了科氏力与离心力的影响,并将有限元计算的结果与解析解作了比较,结果表明

1) 采用有限元法计算得到的转动薄壁圆柱筒静频率,与解析解相比,不同边界条件存在的误差不同,其中两端简支边界条件下两者吻合较好;而其他边界条件下两者存在一些差异,并且周向波数较小时行波频率差异较大,随着周向波数增

加,差异逐渐减小。

2) 由于科氏力的影响,随着转速的增加,行波频率分为前后行波两支,且两者间的频率差随周向波数增大而减小。

3) 由于离心力的影响和离心刚化效应的存在,与仅考虑科氏力的影响时相比,转动薄壁圆柱筒的行波频率有增加的趋势,且当转速和周向波数较大时,前后行波频率均大于静频率。

参考文献:

- [1] Leissa A W. Vibration of shells[R]. NASA-SP-288, 1973.
- [2] Saito T, Endo M. Vibration of finite length, rotating cylindrical shells[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, 107(1): 17-28.
- [3] Lam K Y, Loy C T. Analysis of rotating laminated cylindrical shells by different thin shell theories[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 186(1): 23-35.
- [4] Lam K Y, Loy C T. Influence of boundary conditions for a thin laminated rotating cylindrical shell[J]. Computers and Structures, 1998, 41(3): 215-228.
- [5] LI Hua, Lam K Y. Frequency characteristics of a thin rotating cylindrical shell using the generalized differential quadrature method[J]. International Journal of Mechanical Science, 1998, 40(1): 443-459.
- [6] Evensen D A. Nonlinear flexural vibrations of thin circular rings[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(3): 553-560.
- [7] Zhang X M. Parametric analysis of frequency of rotating laminated composite cylindrical shells with the wave propagation approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(19/20): 2057-2071.
- [8] LI Hua. Frequency analysis of rotating truncated circular orthotropic conical shells with different boundary conditions[J]. Composites Science and Technology, 2000, 60(1): 2945-2955.
- [9] Lam K Y, LI Hua. On free vibration of a rotating truncated circular orthotropic conical shell[J]. Composites: Part B, 1999, 30(1): 135-144.
- [10] Lee Y S, Kim Y W. Vibration analysis of rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners[J]. Computers and Structures, 1998, 69(2): 271-281.
- [11] 洪杰, 郭宝亭. 高速运转壳体行波振动实验研究[J]. 航空动力学报, 1998, 13(4): 390-394.
HONG Jie, GUO Baoting. Experimental investigation on travelling wave of high-speed rotating shell[J]. Journal of Aerospace Power, 1998, 13(4): 390-394. (in Chinese)
- [12] 韩清凯, 王宇, 李学军. 旋转薄壁圆柱壳的高节径振动特性以及箍齿结构的影响[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43(4): 436-458.
HAN Qingkai, WANG Yu, LI Xuejun. High nodal diameter vibration characteristics of rotating shell and the effects

of its sealing teeth[J]. *Scientia Sinica; Physica, Mechanica and Astronomica*, 2013, 43(3): 436-458. (in Chinese)

[13] 晏砺堂, 朱梓根, 李其汉. 高速旋转机械振动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.

[14] Chen Y, Zhao H B, Shen Z P, et al. Vibrations of high speed rotating shells with calculations for cylindrical shells [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 160(1): 137-160.

[15] Guo D, Chu F L, Zheng Z C. The influence of rotation on vibration of a thick cylindrical shell[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 242(3): 487-505.

[16] 曹航, 朱梓根. 转动壳体行波振动的有限元分析方法[J]. *航空动力学报*, 2002, 17(2): 222-225.

CAO Hang, ZHU Zigen. Traveling-wave vibration of rotating shells by finite element method[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2002, 17(2), 222-225. (in Chinese)

[17] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989.

[18] Love A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity[D]. New York: Dover Publications, 1944.

[19] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.

[20] Soedel W. Vibrations of shells and plates[M]. West Lafayette, US: Purdue University, 2004.

[21] Markus S. The mechanics of vibrations of cylindrical shells [D]. New York: Elsevier, 1988.

[22] Dym C L. Some new results for the vibrations of circular cylinders[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 29(2): 189-205.

[23] Chung H. Free vibration analysis of circular cylindrical shells[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, 74(3): 331-350.

(编辑: 陈 越)